Réduction

Eléments propres

Exercice 2.1 ☆
Montrer que l'application $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(M)I_n - M$ définit un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 2.2 ☆
Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1) Montrer que $\mathrm{Sp}(u \circ v) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(v \circ u) \setminus \{0\}$.

2) Montrer que si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Sp}(u \circ v) = \mathrm{Sp}(v \circ u)$.

3) Déterminer $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ tels que $\mathrm{Sp}(u \circ v) \neq \mathrm{Sp}(v \circ u)$.

Exercice 2.3 ☆☆
Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $(a,b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$. Déterminer, sans calculs, les éléments propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ & & (0) & & \\ 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad C = \begin{pmatrix} a & & & (0) & & & b \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a & 0 & b & & \\ (0) & & 0 & a+b & 0 & & (0) \\ & & b & 0 & a & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ b & & & (0) & & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$$

Exercice 2.4 ☆☆
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{Sp}(A) \subset [0,1[$ et $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
Montrer que χ_B est scindé à racines simples si, et seulement si, χ_A est scindé à racines simples.

Exercice 2.5 ☆☆
Montrer que f définie par $f(P) = X(1-X)P' + nXP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner ses éléments propres.

Exercice 2.6 ☆☆☆ Matrice strictement stochastique
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} > 0$ et, pour tout $i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

1) Montrer que 1 est valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est une droite.

2) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \setminus \{1\},\ |\lambda| < 1$.

Diagonalisation

Exercice 2.7 ☆
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et justifier qu'elle est inversible.

2) Pour tout entier relatif k, calculer A^k.

Exercice 2.8 ☆
Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 2.9 ☆
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(AB) \neq 0$.
Montrer que f défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $f(M) = \operatorname{tr}(AM)B$ est un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 2.10 ☆☆
Pour $a \in \mathbb{R}$, étudier la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.11 ☆ Racines carrées d'une matrice
On pose $B = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et on cherche à résoudre l'équation $A^2 = B$, d'inconnue $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Montrer que B est diagonalisable et trouver P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}BP = D$.
2) Montrer que A et B ont les mêmes espaces propres.
3) Déterminer toutes les matrices A solutions.

Exercice 2.12 ☆☆
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f^2 est diagonalisable.

1) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Ker}(f^2 - \lambda^2 \mathrm{id}_E) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f + \lambda \mathrm{id}_E)$.
2) Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$.

Exercice 2.13 ☆☆ Matrice circulante
Soient $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Pour $\omega \in \mathbb{C}$, une racine n-ième de l'unité, montrer que $X_\omega = (1 \ \ \omega \ \ \omega^2 \ \cdots \ \omega^{n-1})^\top$ est vecteur propre de C.
2) En déduire que C est diagonalisable.
3) Déterminer $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $A = P(C)$ et montrer que A est diagonalisable.
4) En déduire le déterminant de A.

Trigonalisation

Exercice 2.14 ☆
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que χ_A soit scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\operatorname{tr}(A^2 + A + I_n) \geqslant 3n/4$.

Exercice 2.15 ☆☆
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Montrer que A est trigonalisable mais pas diagonalisable. Trigonaliser A.
2) Sot $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Montrer que les valeurs propres de M sont dans $\{-1, 0, 1\}$.
3) Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 = A$.

Exercice 2.16 ☆☆

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} -t & -1 & t \\ -1 & 1-t & 1 \\ t & -1 & -t \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Déterminer la plus petite valeur t_0 de t telle que $A(t)$ ne soit pas diagonalisable.

2) Montrer que $A(t_0)$ est trigonalisable et la trigonaliser.

Exercice 2.17 ☆☆☆

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Montrer que A est trigonalisable mais pas diagonalisable.

2) Déterminer A^n en fonction de A et I_3, pour tout entier naturel n.

3) Déterminer les sous-espaces vectoriels F de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A.
(L'énumération se fera en fonction de la dimension de F).

Polynôme annulateur

Exercice 2.18 ☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2.19 ☆

1) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Etablir l'équivalence : $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing \iff \chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2) Ce résultat subsiste-t-il lorsque A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2.20 ☆

Soit $A = (i/j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer A^2 et montrer que A est-elle diagonalisable.

Exercice 2.21 ☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A^3 - A - I_n)^2 = 0$. Etudier la fonction $x \mapsto x^3 - x - 1$ et montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 2.22 ☆

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\mathrm{tr}(M) = n$.

Exercice 2.23 ☆

Soient n, un entier supérieur ou égal à 3, et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que A admet au plus 3 valeurs propres, puis montrer que A est diagonalisable.

2) Calculer A^k, pour tout entier naturel k.

Exercice 2.24 ☆☆

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

Exercice 2.25 ☆☆

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1) Déterminer, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, les 4 blocs de $P(B)$ en fonction de $P(A)$ et $P'(A)$.

2) Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0$.

Exercice 2.26 ☆☆☆
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 2.27 ☆☆☆ Dimension du commutant
Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle commutant de A, l'ensemble $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}$.

1) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Montrer que, lorsque χ_A est scindé à racines simples, $\dim \mathcal{C}(A) = n$.

3) Quelle est la dimension du commutant de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 2.28 ☆☆☆ Equation de Sylvester
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les spectres de A et de B pour que :

$$\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad AX - XB = Y$$