Séries entières

Rayon de convergence

Exercice 11.1 ☆
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1) $\sum (\frac{nz}{n+1})^n$ **2)** $\sum \frac{\operatorname{sh} n}{n+1} z^n$ **3)** $\sum n! z^{n^2}$ **4)** $\sum (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}) z^n$ **5)** $\sum (\ln n)^n z^n$ **6)** $\sum \int_0^1 \frac{t^n \mathrm{d}t}{1+t^{2026}} z^n$ **7)** $\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n z^n$ **8)** $\sum \frac{\cos n}{\sqrt{n+(-1)^n}} z^n$

Exercice 11.2 ☆
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On note R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et R' celui de $\sum \sin(a_n) x^n$, et on suppose que $R > 1$. Montrer que $R = R'$.

Exercice 11.3 ☆☆
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ne s'annulant pas telle que $\frac{a_{n+3}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in]0,+\infty[$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 11.4 ☆
Déterminer le domaine de définition des fonctions de la variable réelle suivantes :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3n+1} \qquad g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n^{3/2}} \qquad h : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n \qquad k : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$$

Exercice 11.5 ☆
Déterminer le rayon de convergence, le domaine réel de convergence et la somme sur l'intervalle ouvert de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ avec :
1) $a_n = \operatorname{sh}(n)$ **2)** $a_n = \frac{n^2}{n!}$ **3)** $a_0 = 1,\ a_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 2,\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ **4)** $a_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t$

Exercice 11.6 ☆☆
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n \mathrm{d}t$ et on note R le rayon de convergence et S la somme de $\sum a_n x^n$.
Montrer que $R \geqslant 4$ et que, pour tout $x \in]-4,4[,\ S(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-xt+xt^2}$. En déduire la valeur de R.

Régularité de la somme

Exercice 11.7 ☆☆

1) Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \frac{1}{6}\ln(1+x+x^2) - \frac{1}{3}\ln(1-x) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x\sqrt{3}}{2+x}\right)$.

2) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 11.8 ☆
Pour x réel convenable, calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

Exercice 11.9 ☆☆
Soit $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$. Calculer $g + g' + g''$ et en déduire g.

Exercice 11.10 ☆☆

Pour x réel convenable, on pose $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$, avec $a_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

1) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $(2n+1)a_n = na_{n-1}$ et en déduire le plus grand ouvert I sur lequel h est définie.

2) Pour tout $x \in I$, calculer $(2-x^2)h'(x) - xh(x)$, puis expliciter h sur I.

Exercice 11.11 ☆☆☆ Théorème d'Abel

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière, à coefficients complexes et de rayon de convergence $R > 0$. On cherche à montrer que, si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge et a pour somme S, alors $f(x) \xrightarrow[x \to R^-]{} S$.

1) Montrer que l'on peut se ramener au cas où $R = 1$ et $S = 0$.

2) En posant $S_{-1} = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, établir que :

$$\forall x \in]0,1[, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1})x^n = \sum_{n=0}^{N} S_n(x^n - x^{n+1}) + S_N x^{N+1}$$

3) En déduire que, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$, puis conclure.

Développement en série entière

Exercice 11.12 ☆☆

Développer en série entière, en précisant le rayon de convergence, les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x \cos x \qquad f_2 : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad f_3 : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} \qquad f_4 : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$$

Exercice 11.13 ☆

Montrer que la fonction g, définie par $g(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1 - x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 2$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.14 ☆☆

Déterminer la fonction f développable en série entière et solution de l'équation différentielle $x^2 y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$.

Exercice 11.15 ☆☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, une **involution** de $[\![1,n]\!]$ est une application $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telle que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$.

On note I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$, avec la convention $I_0 = 1$ et $p_n = \frac{I_n}{n!}$.

1) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$.

2) Montrer que la somme S de la série entière $\sum p_n x^n$ vérifie, pour tout $x \in]-1,1[$, $(1+x)S(x) = S'(x)$.

3) Déterminer I_n sous la forme d'une somme finie.

Exercice 11.16 ☆☆

Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+\mathrm{e}^t} \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Exercice 11.17 ☆☆☆ Inverse d'une série entière

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, telle que $a_0 = 1$.

1) Montrer qu'il existe une unique suite (b_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}$.

2) Soit $r \in]0,R[$. Montrer que : $\exists M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n r^n| \leqslant M$ puis que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|b_n| \leqslant \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$.

3) En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$ est strictement positif et conclure.

Exercice 11.18 ☆☆☆

Soient $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(ax)$.

1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle n'est pas développable en série entière si $a > 1$ et $f(0) \neq 0$.

2) Montrer que f est développable en série entière si $a \leqslant 1$.