

Espaces vectoriels normés

Norme

Exercice 5.1 ★

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (e^{-|x|} |f(x)|)$ et $n(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} ((1 - e^{-|x|}) |f(x)|)$.

- 1) Montrer que N et n sont deux normes sur E .
- 2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer les normes de $f_k : x \mapsto e^{-k|x|}$. Les normes N et n sont-elles équivalentes ?

Exercice 5.2 ★★

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ s'annulant en 0. Pour $f \in E$, on pose :

$$n(f) = \|f + f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Pour $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, résoudre $\begin{cases} f' + f = g \\ f(0) = 0 \end{cases}$ puis montrer que n et N sont deux normes équivalentes sur E .

Exercice 5.3 ★

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées de premier terme nul. Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, on pose :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad \|u\|_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$

Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont deux normes sur E et les comparer.

Exercice 5.4 ★

Montrer que N , définie par $N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}$, est une norme sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et la comparer à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5.5 ★

Pour $P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_1(P) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ et $N_2(P) = \int_0^1 |P(t)| dt$.

Montrer que N_1 et N_2 définissent deux normes sur $\mathbb{R}[X]$, que $N_2 \leq N_1$, mais qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 5.6 ★★ NORME SUBORDONNÉE

On munit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de N_∞ et on note S la sphère unité de (E, N_∞) .

- 1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier l'existence du réel $|||A||| = \sup_{X \in E \setminus \{0\}} \frac{N_\infty(AX)}{N_\infty(X)}$ et montrer que $|||A||| = \max_{X \in S} N_\infty(AX)$.
- 2) Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que :

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad |||A||| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

Convergence des suites

Exercice 5.7 ★

Dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $(A - I_3)^2$, puis montrer que la suite $(S_n(A))_{n \geq 0}$, définie par $S_n(A) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k$, converge et calculer sa limite.

Exercice 5.8 ★★

$E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ est muni des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f|$.

Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ définie par $f_n(x) = nx^n(1-x)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$ et dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 5.9 ★

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ constitués respectivement des matrices symétriques et des matrices antisymétriques.

- 1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont fermés dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite (A^k) converge. Déterminer sa limite.

Exercice 5.10 ★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer l'équivalence :

$$\text{la suite } (A^k)_{k \geq 0} \text{ converge dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset]-1, 1]$$

On note alors $B = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k$. Montrer que B est la matrice d'un projecteur.

Topologie

Exercice 5.11 ★ MATRICE STOCHASTIQUE

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} \geq 0$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fermé, borné, convexe et d'intérieur vide.

Exercice 5.12 ★

Les ensembles suivants sont-ils ouverts, fermés, bornés ?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + xy + y^2 < 1\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z^2) \leq 1\}$$

Exercice 5.13 ★

Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes unitaires est fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5.14 ★★ BORNE INFÉRIEURE SUR UN FERMÉ

$E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et $F = \{f \in E, f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f \geq 1\}$. Montrer que F est un fermé de E et que, pour tout $f \in F$, $\|f\|_\infty \geq 1$. Puis, montrer que $\inf_{f \in F} \|f\|_\infty = 1$.

Exercice 5.15 ★

Soit G le graphe de $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ sur $]0, +\infty[$. Montrer que, pour tout $y \in [-1, 1]$, le point $(0, y)$ est adhérent à G .

Exercice 5.16 ★★

Soient E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E .

Pour tout $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

- 1) Montrer que, pour tout x de E , on a $d(x, A) = 0 \iff x$ est adhérent à A .
- 2) Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 5.17 ★

$(E, (\cdot, \cdot))$ est un espace euclidien. Montrer que $F = \{(u, v) \in E^2, u \text{ et } v \text{ non colinéaires}\}$ est un ouvert de $E \times E$.

Exercice 5.18 ★★ ★ THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et F le sous-ensemble de E constitué des matrices diagonalisables.

- 1) Calculer $\chi_A(A)$ lorsque $A \in E$ est diagonale, puis lorsque $A \in F$.
- 2) Montrer que $\overline{F} = E$.
- 3) Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

Limite et continuité

Exercice 5.19 ★ LIMITE EN $(0, 0)$

Etudier l'existence et calculer l'éventuelle limite en $(0, 0)$ des applications définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ suivantes :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{\sin(x^2)}{|x| + |y|} \quad g : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad h : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Exercice 5.20 ★

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue en 0 telle que $f(0) = (0, 1)$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f\left(\frac{t}{2}\right) + \left(\frac{t}{2}, -\frac{3t^2}{(t^2+1)(t^2+4)}\right)$.
Montrer que l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(t) = f(t) - (t, \frac{1}{t^2+1})$ est constante et en déduire f .

Exercice 5.21 ★ DEUX NORMES SUR $\mathbb{R}[X]$

On considère sur $E = \mathbb{R}[X]$ les normes N_1 et N_2 ainsi que l'application φ définies par :

$$\forall P \in E, \quad N_1(P) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |P(t)| \quad N_2(P) = \sup_{1 \leq t \leq 2} |P(t)| \quad \varphi(P) = P(0)$$

- 1) Montrer que φ définit une application continue de (E, N_1) vers $\mathbb{R}$, mais discontinue de (E, N_2) vers $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser la suite définie par $P_n(t) = (1 - t/2)^n$).
- 2) Montrer que $\text{Ker } \varphi$ est fermé dans (E, N_1) mais pas dans (E, N_2) .

Exercice 5.22 ★ APPLICATION CONTRACTANTE

Les applications suivantes sont-elles contractantes, c'est-à-dire lipschitziennes de rapport $k < 1$?

$$f : x \mapsto \ln(1 + x/2) \quad \text{sur } [1, +\infty[\quad \text{et} \quad g : x \mapsto \arctan(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Exercice 5.23 ★★

$E = \mathbb{R}_n[X]$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $0 < a < b$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que :

$$\forall P \in E, \quad a \leq \|P\| \leq b \implies \sum_{j=0}^n (P(j))^2 \geq m$$

Exercice 5.24 ★★ GROUPE ORTHOGONAL

Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère $O(n) = \{A \in E, A^\top A = I_n\}$.

Montrer que $O(n)$ est un fermé borné de E , puis que l'application tr admet des extrema sur $O(n)$ et les calculer.

Exercice 5.25 ★★

Soient $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et $L : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_{-1}^1 f(t) \sin(\pi t) dt \end{cases}$
Montrer que L est continue et déterminer le plus petit réel k tel que, pour tout $f \in E$, $|L(f)| \leq k \|f\|_\infty$.

Exercice 5.26 ★★ POINT FIXE

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, K un fermé borné non vide de E et $f : K \rightarrow K$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

Montrer que f admet un unique point fixe. (On pourra considérer $\alpha \inf_{x \in K} \|f(x) - x\|$)