# Variables aléatoires discrètes

## Lois usuelles

**Exercice 12.1** ☆
Soient $X$ une variable de Poisson de paramètre $\lambda$ et $Y$ la variable de Bernoulli valant 0 lorsque $X$ prend une valeur impaire et $1$ lorsque $X$ prend une valeur paire. Quelle est l'espérance de $Y$ ?

**Exercice 12.2** ☆
Un candidat passe chaque année trois concours indépendants avec la probabilité de réussite à chaque concours de $1/3$. Déterminer la loi et l'espérance du nombre d'années $X$ nécessaires à l'intégration.

**Exercice 12.3** ☆
Un gardien doit ouvrir 10 portes avec 10 clés différentes. Quand il est ivre, il mélange les clefs après chaque essai, sinon il retire la mauvaise clef du trousseau. Soit $X$ le nombre aléatoire de clefs utilisées pour ouvrir la première porte lorsqu'il est à jeun et $Y$ ce nombre lorsqu'il est ivre.

**1)** Quelle est l'espérance de $X$ et de $Y$ ?

**2)** Sachant qu'il est ivre un jour sur trois et qu'un certain jour il a essayé au moins 9 clefs, quelle est la probabilité que ce jour-là, il se soit livré à quelques libations ?

**Exercice 12.4** ☆
Une VAR $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et $Y$ est une VAR prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la loi conditionnelle de $Y$ sachant $(X = n)$ est binomiale de paramètres $n$ et $p$. Quelle est la loi de $Y$ ?

**Exercice 12.5** ☆☆
Trois VAR mutuellement indépendantes $X, Y, Z$ suivent la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
Déterminer la loi de $X + Y$, puis la probabilité des événements suivants :

$$A = (X + Y = Z) \qquad B = (X + Y + Z = n + 1) \qquad C = (X + Y = 2Z)$$

## Couple et indépendance

**Exercice 12.6** ☆
Soient un réel $a$ et $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que :

$$\forall i, j \in \mathbb{N},\ P(X = i, Y = j) = \frac{a}{2^{i+1} j!}$$

Calculer $a$ et dire si $X$ et $Y$ sont indépendantes.

**Exercice 12.7** ☆☆☆
Pour tout entier naturel $n$ et tout réel $t \geqslant 1$, on pose $f_n(t) = \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}$ et $g_n(t) = \frac{1}{t^n n!}$.

**1)** Pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, établir la convergence et calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \int_1^{+\infty} f_n(t) g_j(t) \mathrm{d}t$.

**2)** Soient $\alpha$ un réel strictement positif fixé et $(X, Y)$ un couple de V.A.R. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \qquad P(X = i, Y = j) = \alpha \int_1^{+\infty} f_i(t) g_j(t) \mathrm{d}t$$

Déterminer la loi marginale de $Y$ et calculer $\alpha$, puis montrer que $Y$ admet une espérance et une variance et les calculer.

**Exercice 12.8** ☆☆ Loi de Mengoli

**1)** Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire successivement et avec remise une boule de l'urne en ajoutant une boule blanche après chaque tirage. On note $X$ (resp. $Y$) la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche (resp. la première boule noire).

**a)** Déterminer les lois de $X$ et de $Y$ et calculer, le cas échéant, leur espérance.

**b)** Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**2)** Soit $g$ la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$.

**a)** Montrer que, pour tout $x \in ]-1,1[,\ g(x) = 2x + (1-x)\ln(1-x) - (1+x)\ln(1+x)$ et en déduire $g(1)$.

**b)** Comparer la probabilité que $X$ soit paire et la probabilité que $Y$ soit paire.

## Espérance

**Exercice 12.9** ☆

Un spot se déplace sur une droite à partir de l'origine. À chaque seconde, il se déplace d'une unité vers la droite avec la probabilité $p$ ou vers la gauche avec la probabilité $q = 1 - p$. Soit $X$ son abscisse après $n$ secondes. Déterminer $E(X)$. (On pourra utiliser les variables $X_i$ valant $1$ si le $i$ ème déplacement a lieu vers la droite et $-1$ s'il a lieu vers la gauche)

**Exercice 12.10** ☆☆

Soit $X$ une variable discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant une variance. Montrer que $E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)P(X > n)$.

**Exercice 12.11** ☆☆

Soit $X$ une V.A.R. à valeurs positives d'espérance finie. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n) \leqslant E(X) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.

**Exercice 12.12** ☆☆

Soit $X$ une V.A.R. prenant un nombre fini de valeurs.

**1)** Si $X$ est positive, montrer que $E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t)\mathrm{d}t$.

**2)** Déterminer $E(X)$ dans le cas général.

**Exercice 12.13** ☆☆☆

Soit $(E_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n) < +\infty$.

**1)** Soit $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{E_n}$ (on convient que $Z = +\infty$ si la série diverge). Montrer que $Z$ est une variable discrète.

**2)** Montrer que $F = \{\omega \in \Omega,\ \omega$ n'appartient qu'à un nombre fini de $E_n\}$ est un événement et calculer $P(F)$.

**3)** Montrer que $Z$ est d'espérance finie.

**Exercice 12.14** ☆

Soit $X$ une V.A.R. admettant une variance. Montrer que $E(X)^2 \leqslant E(X^2)P(X \neq 0)$.

## Variance et corrélation

**Exercice 12.15** ☆

Montrer que deux variables de Bernoulli sont indépendantes si, et seulement si, elles sont non corrélées.

**Exercice 12.16** ☆

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VAR indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

$Y_n$ et $Y_{n+1}$ sont-elles indépendantes ? Calculer la covariance du couple $(Y_n, Y_{n+1})$. Espérance et variance de $Y_1 + \cdots + Y_n$ ?

**Exercice 12.17** ☆☆ Temps d'attente du $n$-ème succès
Un joueur lance indéfiniment un dé hexaédrique équilibré. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n$ le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le $n$-ème « six ».
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Y_n$, puis calculer $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$.

**Exercice 12.18** ☆☆ Une urne semi-numérotée
On donne une entier $n \geqslant 1$ et on considère une urne contenant $2n$ boules. Parmi ces $2n$ boules, $n$ sont numérotées de $1$ à $n$ et les $n$ autres ne portent pas de numéro. On prélève alors au hasard et simultanément $n$ boules de cette urne. On note :

- $N_n$ la VAR égale au nombre de boules du prélèvement qui portent un numéro.
- $S_n$ la VAR égale à la somme des numéros des boules numérotées du prélèvement.
- pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i$ la VAR égale à $1$ si la boule numéro $i$ est tirée et égale à $0$ sinon.

**1)** Deux Préliminaires

**a)** Pour $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a + b \geqslant n$, établir la **formule de Vandermonde** : $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

**b)** Montrer que $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{24}$.

**2)** Déteterminer la loi (dite **hypergéométrique**), l'espérance et la variance de la variable $N_n$.

**3)** Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, déterminer la loi, l'espérance et la variance de $X_i$, ainsi que la covariance du couple $(X_i, X_j)$.

**4)** Déterminer l'espérance et la variance de la variable $S_n$.

**Exercice 12.19** ☆☆☆ La covariance de Maxwell-Boltzman
Soient $n$ et $r$ deux entiers naturels non nuls. On considère $n$ boules $b_1, \ldots, b_n$ numérotées de $1$ à $n$, ainsi que $r$ tiroirs $t_1, \ldots, t_r$ numérotés de $1$ à $r$. On place l'une après l'autre et au hasard les $n$ boules dans les $r$ tiroirs (les tiroirs étant suffisamment grands pour accueillir, s'il le faut, toutes les boules). On note :

- $T_1$ la VAR égale au nombre de boules qui ont atterri dans le tiroir $t_1$.
- $V$ la VAR égale au nombre de tiroirs restés vides.
- pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, $V_i$ la VAR égale à $1$ si le tiroir $t_i$ est vide et égale à $0$ sinon.
- pour chaque $j \in [\![1, n]\!]$, $B_j$ la VAR égale à $1$ si la boule $b_j$ atterrit dans $t_1$ et égale à $0$ sinon.

**1)** Quel est le nombre $S_r^n$ de surjections de $[\![1, n]\!]$ vers $[\![1, r]\!]$ lorsque $n < r$ ? $n = r$ ? $r = 1$ ? $r = 2$ ?

**2)** Pour $i \in [\![1, r]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, déterminer $\mathrm{Cov}(V_i, B_j)$ et en déduire que $V$ et $T_1$ ne sont pas corrélées.

**3)** Sont-elles indépendantes ?

## Fonction génératrice

**Exercice 12.20** ☆
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $X$ une V.A.R. à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est $G_X : t \longmapsto \alpha \ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)$.
Déterminer la loi de $X$ et montrer qu'elle admet une espérance et une variance que l'on calculera.

**Exercice 12.21** ☆☆☆ Les urnes de Tatiana et Paul Ehrenfest
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les entiers $1, 2, \ldots, n$ sont disposés dans deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient $m (\in [\![0, n]\!])$ de ces entiers, et bien évidemment l'urne $\mathcal{U}_2$ en contient $n - m$, mais nous n'avons aucune information sur les valeurs des $m$ entiers de $\mathcal{U}_1$, pas plus que sur celles des $n - m$ entiers de $\mathcal{U}_2$. On tire au hasard un nombre entre $1$ et $n$. On repère alors l'entier correspondant situé dans l'urne $\mathcal{U}_1$ ou l'urne $\mathcal{U}_2$ et cet entier est changé d'urne. Et nous poursuivons indéfiniment cette procédure.
Pour $i \geqslant 1$, notons $\nu_i$ le nombre d'entiers dans l'urne $\mathcal{U}_1$ après la $i$-ème procédure et, par convention, $\nu_0 = m$.

**1)** Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la var $\nu_1$.

**2)** Pour tout $i \geqslant 0$, exprimer la loi de $\nu_{i+1}$ en fonction de celle de $\nu_i$.

**3)** On note $G_i$ la fonction génératrice de la $\nu_i$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{i+1}(t) = t \cdot G_i(t) + \frac{1-t^2}{n} \cdot G_i'(t)$.
En déduire l'existence et la valeur de $E(\nu_i)$, ainsi que sa limite lorsque $i \to +\infty$. Interpréter.

*N.B. Le couple Tatiana Afanassieva (mathématicienne russo-néerlandaise 1876-1964) et Paul Ehrenfest (physicien autrichien 1880-1933) aurait créé cette expérience probabiliste pour modéliser les échanges de molécules gazeuses au travers d'une paroi poreuse. Le modèle aurait aussi servi à gérer des échanges thermiques.*

**Exercice 12.22** ☆☆

Montrer qu'il n'est pas possible de piper deux dés de sorte que la somme des points obtenus suive une loi uniforme.

**Exercice 12.23** ☆☆

Soient $X$ et $Y$ deux variables discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi, telles que la V.A.R. $Z = X + Y + 1$ suive une loi géométrique de paramètre $p \in ]0, 1[$. Déterminer les lois de $X$ et $Y$.

**Exercice 12.24** ☆☆☆

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[0, 1]$.

Montrer que $X$ et $Y$ suivent la même loi si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N},\ E(X^n) = E(Y^n)$.

*On pourra utiliser le <u>théorème de Stone-Weierstrass</u> : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.*