Endomorphismes des espaces euclidiens

Isométries et matrices orthogonales

Exercice 9.1 ☆☆
a est un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E.
Pour tout réel α, on définit l'application f_α sur E par $f_\alpha(u) = u + \alpha(a|u)a$.

1) Montrer que f_α définit un endomorphisme de E.

2) Pour quels réel α l'application f_α est-elle un automorphisme de E ?

3) Pour quels réel α l'application f_α est-elle une isométrie de E ? L'identifier, dans ces cas.

4) Déterminer les éléments de réduction de f_α. Que dire de f_α ?

Exercice 9.2 ☆

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$ et que $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

Exercice 9.3 ☆

Montrer que $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{bmatrix}$ est la matrice d'une symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ et l'identifier.

Exercice 9.4 ☆☆
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

1) Montrer que $I_n - A$ et $I_n + A$ sont inversibles.

2) Montrer que $(I_n - A)^{-1}$ et $I_n + A$ commutent, puis que $U = (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \in \mathrm{SO}(n)$.

Exercice 9.5 ☆
$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel. Trouver la matrice S dans la base canonique de la réflexion s d'hyperplan H d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

Exercice 9.6 ☆☆☆
E est un espace euclidien, $f \in \mathrm{O}(E)$ et $g = \mathrm{id}_E - f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} X^k \in \mathbb{R}[X]$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

2) Soit p la projection orthogonale de E sur $\mathrm{Ker}(g)$ et $x \in E$. Montrer que $Q_n(f)(x)$ converge dans E vers $p(x)$.

Isométries du plan et de l'espace

Exercice 9.7 ☆
E désigne un espace euclidien orienté de dimension 3, $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $f(x) = a \wedge x$.
On admet la formule du double produit vectoriel : $\forall x, y, z \in E,\ x \wedge (y \wedge z) = (x|z)y - (x|y)z$.

1) Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$, puis résoudre l'équation $f(x) = b$, pour $b \in E$.

2) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? trigonalisable ? (On pourra déterminer f^3)

Exercice 9.8 ☆
$\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique, orienté par sa base canonique. Pour tout θ réel, r_θ et s_θ désignent respectivement la rotation d'angle θ et la réflexion d'angle polaire $\theta/2$.
Pour $\theta,\ \theta' \in \mathbb{R}$, reconnaître les isométries $r_\theta \circ r_{\theta'}$, $r_\theta \circ s_{\theta'}$, $s_{\theta'} \circ r_\theta$ et $s_\theta \circ s_{\theta'}$.

Exercice 9.9 ☆
$\mathbb{R}^3$ est orienté par sa base canonique et $\mathcal{D}$ est la droite dirigée par $u = (1, 1, 0)$. Quelle est la matrice M de la rotation f d'angle de mesure $\theta = \arcsin(4/5)$ et d'axe dirigé et orienté par u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9.10 ☆☆
E est un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans une b.o.n.d. (e_1, e_2, e_3) est A. Montrer que f est une isométrie de E et la caractériser dans chacun des cas suivants :

$$(a) \quad A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \qquad (c) \quad A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.11 ☆
Quelles sont les isométries diagonalisables en dimension 2 ? En dimension 3 ?

Exercice 9.12 ☆☆
On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté par sa base canonique.

1) Soit n un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la rotation r d'angle de mesure θ et d'axe dirigé et orienté par n est définie par :
$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad r(u) = \cos(\theta)u + [1 - \cos(\theta)](u|n)n + \sin(\theta)n \wedge u$$

2) Donner la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle de mesure $\pi/3$ et d'axe dirigé et orienté par $(1, 1, 1)$.

Exercice 9.13 ☆☆ Caractérisation d'une rotation
Dans l'espace euclidien et orienté $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme non nul f.
Montrer que $f \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$ si, et seulement si, f conserve le produit vectoriel, c'est-à-dire :
$$\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \quad f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$$

Théorème spectral

Exercice 9.14 ☆
Soit E un espace vectoriel euclidien et $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{S}(E)$ tel que, pour tout $u \in E$, $(f(u)|u) = \alpha\|u\|^2$.

Exercice 9.15 ☆

1) Déterminer, sans calculs, les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et leur multiplicité.

2) Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $(Q(A))^3 = A$, et le déterminer.

Exercice 9.16 ☆☆
On considère $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Montrer que χ_A possède 3 racines réelles distinctes strictement positives $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que l'on ne calculera pas.

2) Montrer que l'application $\varphi : (X, Y) \mapsto X^\top AY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 9.17 ☆
Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = AA^\top - A^\top A$ telle que $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $B = 0$.

Exercice 9.18 ☆☆ Matrice de Hilbert

Montrer que $H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique définie positive. *(On pourra remarquer que $\int_0^1 t^{i+j-2}\,dt = \frac{1}{i+j-1}$)*

Exercice 9.19 ☆☆

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $\Omega \in \mathrm{O}(n)$. Montrer que $\mathrm{tr}(A\Omega) \leqslant \mathrm{tr}(A)$.

Exercice 9.20 ☆☆

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\mathrm{tr}\, A)^2 \leqslant \mathrm{rg}(A)\cdot \mathrm{tr}(A^2)$.

Exercice 9.21 ☆☆ Décomposition polaire

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*\}$. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^\top A$.

1) Montrer que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = B$.

2) Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QS$.

Exercice 9.22 ☆☆ Quotient de Rayleigh

$E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel $(\cdot|\cdot)$ et soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que l'application $q_A : E \setminus \{0_E\} \to \mathbb{R}$ définie par $q_A(X) = \frac{(AX|X)}{\|X\|^2}$ admet des extrema et les déterminer.

2) Déterminer les extrema de l'ensemble $\left\{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j,\ \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1\right\}$.

Exercice 9.23 ☆☆☆

Montrer que, si A et B symétriques réelles, sont telles que $A^3 = B^3$, alors $A = B$. *Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres, puis les mêmes sous-espaces propres.*

Matrice antisymétrique

Exercice 9.24 ☆

E désigne l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(α) A est antisymétrique $\quad$ (β) Pour tout $X \in E,\ X^\top AX = 0$ $\quad$ (γ) Pour tous $X, Y \in E,\ X^\top AY = -Y^\top AX$

Exercice 9.25 ☆☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice antisymétrique.

1) Montrer que l'image et le noyau de A sont supplémentaires orthogonaux.

2) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$ et que, lorsque n est impair, on a $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

3) Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$ et en déduire que $\det(A) \geqslant 0$.

Exercice 9.26 ☆☆

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si, et seulement si, pour tout $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ P^\top AP$ est de diagonale nulle.

Exercice 9.27 ☆☆☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et $B = A^2$. On note $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Soit a une valeur propre non nulle de B et V_a le sous-espace propre associé.
Montrer que, pour tout $X \in V_a,\ \ X^\top BX = a\|X\|^2 = -\|AX\|^2$, et en déduire que $a < 0$.

2) Soit $X \in V_a \setminus \{0\}$. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(X, AX)$ et $F^\perp$ sont stables par A.

3) Soit $f = \mathrm{Can}(A)$. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, dans toute b.o.n. de F, $f|_F$ a pour matrice $\pm\alpha J$.

4) En déduire que A est orthog. semblable à une matrice diag par blocs $\mathrm{diag}(\alpha_1 J, \ldots, \alpha_p J, 0, \ldots, 0)$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}^*$.