

Intégration

Intégration sur un segment et primitive

Exercice 4.1 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx$.

Montrer que la suite (u_n) décroît et converge vers 0, puis que $u_n \sim \frac{1}{n\sqrt{2}}$.

Exercice 4.2 ★

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} dx$$

$$I_2 = \int_1^2 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/4} \cos x \ln(\cos x) dx$$

Exercice 4.3 ★

Déterminer une primitive, sur un domaine réel à préciser, de chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x \operatorname{sh}(x) \sin(x)$$

$$g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x - 5}$$

$$h : x \mapsto \frac{1 - \cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

Exercice 4.4 ★

Calculer $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t}{\arcsin t} - \frac{1}{t}$, puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t dt}{\arcsin t}$.

Exercice 4.5 ★★

Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4.6 ★★

Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a > 0$, on ait $f(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt$.

Exercice 4.7 ★

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + nk + n^2}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Fonctions continues par morceaux

Exercice 4.8 ★

Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \left\lfloor t + \frac{1}{2} \right\rfloor dt$ est continue sur $\mathbb{R}$ et l'expliciter.

Exercice 4.9 ★

Montrer que la fonction $f : t \mapsto t \lfloor 1/t \rfloor$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$, puis que $\int_0^1 f(t) dt$ converge et la calculer.

Exercice 4.10 ★★ LEMME DE RIEMANN-LEBESGUE

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$, lorsque f est en escalier sur $[a, b]$.

Le lemme de Riemann-Lebesgue affirme que le résultat subsiste lorsque f est seulement continue par morceaux sur $[a, b]$.

Convergence et calcul

Exercice 4.11 ★

α et β étant des paramètres réels, donner la nature des intégrales suivantes :

- | | | | |
|--|--|--|---|
| 1) $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$ | 4) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{\ln x}}$ | 7) $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\sqrt{x}} dx$ | 10) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x - \cos x}$ |
| 2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ | 5) $\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right) dx$ | 8) $\int_0^{+\infty} \ln(x) e^{-x} dx$ | 11) $\int_0^1 \frac{x \ln x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$ |
| 3) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ | 6) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^\alpha (x+1)^\beta}$ | 9) $\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right) dx$ | 12) $\int_0^{+\infty} \sin^2(1/x) dx$ |

Exercice 4.12 ★★

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a < b$. Montrer que les intégrales suivantes convergent et les calculer :

- | | | | |
|--|--|--|---|
| 1) $\int_0^1 (\ln x)^n dx$ | 3) $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$ | 5) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x} dx$ | 7) $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$ |
| 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ | 4) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} dx$ | 6) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ | 8) $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \arcsin \frac{1}{x} \right) dx$ |

Intégrabilité

Exercice 4.13 ★

Etudier la convergence absolue et la convergence des intégrales suivantes :

- | | | | |
|---|--|---|---|
| 1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt$ | 3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \sin(\frac{1}{t^2})}{\ln(1+t)} dt$ | 5) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt$ | 7) $\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{1+t} dt$ |
| 2) $\int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$ | 4) $\int_0^{+\infty} \frac{te^{it}}{i-t^3} dt$ | 6) $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$ | 8) $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ |

Exercice 4.14 ★★

- 1) En minorant $f : x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x}$ sur des intervalles bien choisis, montrer que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
- 2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ converge pour tout $\alpha > 0$, alors que $x \rightarrow \frac{\sin x}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.
- 3) Etudier la nature des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x+\sin x}} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x+\cos x}} dx$.

Exercice 4.15 ★★ INTÉGRALE DE DIRICHLET

- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{t} dt$ existent.
- 2) Montrer que la suite (I_n) est constante et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n - J_n$. (On pourra utiliser le résultat de l'exercice 4.10)
- 3) En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 4.16 ★★

- 1) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ converge.
- 2) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.
- 3) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$.

Exercice 4.17 ★★★

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

- 1) Montrer que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- 2) Etudier les séries $\sum f(n)$ et $\sum f'(n)$.