Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

Produit scalaire et orthogonalité

Exercice 8.1 ☆
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x,y),(x',y')) & \longmapsto & xx' + \alpha(xy' + x'y) + yy' \end{array} \right.$ est une produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, $\alpha \in]-1,1[$.

Exercice 8.2 ☆
Résoudre l'équation $(1-x)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ d'inconnues réelles x, y et z.

Exercice 8.3 ☆
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $A_n = \left\{ \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{x_i}{x_j},\ (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \right\}$ admet un minimum et le déterminer.

Exercice 8.4 ☆
Soient $E = \{f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}),\ f > 0\}$ et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)$.
Démontrer l'existence et calculer $\inf \varphi(E)$, et montrer que $\varphi(E)$ n'est pas majoré.

Exercice 8.5 ☆☆
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (\cos^2 i + \sin^2 j)^2 \geqslant n^2$.

Exercice 8.6 ☆☆
On considère la famille de polynômes $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$ et, pour tout $k \geqslant 1$, $P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}$.

1) Montrer que, pour tous entiers j et k tels que $0 \leqslant j \leqslant k$, on a $P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j)$.

2) Montrer que la relation $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3) Montrer que $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est orthonormale pour ce produit scalaire et que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(k) P_k$.

Exercice 8.7 ☆☆
Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une b.o.n. d'un espace euclidien E et $x_1, \ldots, x_n$, des vecteurs de E vérifiant $\sum_{k=1}^{n} \|e_k - x_k\|^2 < 1$. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E.

Exercice 8.8 ☆☆ Décomposition QR

1) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice triangulaire supérieure R telles que $A = QR$.

2) Quel est l'intérêt de cette décomposition pour la résolution du système linéaire $AX = B$?

Exercice 8.9 ☆☆☆ Polynômes de Legendre
$\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire défini par $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et, $\forall n \in \mathbb{N},\ L_n(X) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!}((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1) Montrer que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer que L_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que ses racines $x_1, \ldots, x_n$ sont distinctes et dans $]-1,1[$.

3) Pour $n \geqslant 1$, montrer qu'il existe une unique famille de réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ telle que, pout tout $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on ait $\int_{-1}^{1} Q(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i Q(x_i)$. *(on pourra commencer par le cas où $\deg(Q) \leqslant n-1$)*

Projection orthogonale

Exercice 8.10 ☆

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E vérifiant $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$, pour tout $x \in E$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

Exercice 8.11 ☆

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel et $\mathcal{H} = \{M \in E,\ \mathrm{tr}(M) = 0\}$. Pour $A \in E$, calculer $\mathrm{d}(A, \mathcal{H})$.

Exercice 8.12 ☆

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le sous-espace $F = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ \sum_{i=1}^4 x_i = \sum_{i=1}^4 ix_i = 0\right\}$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8.13 ☆

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. d'un espace euclidien E et p une projection orthogonale de E.
Montrer que $\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2 = \mathrm{rg}(p)$.

Exercice 8.14 ☆☆

Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

(a) p est un projecteur orthogonal **(b)** $\mathrm{Ker}\, p \subset (\mathrm{Im}\, p)^\perp$ **(c)** $\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$

Exercice 8.15 ☆☆ Déterminant de Gram

Soient $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs d'un espace préhilbertien E. On appelle **matrice de Gram** du système $(x_1, \dots, x_p)$, la matrice $G(x_1, \dots, x_p) = ((x_i|x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et **déterminant de Gram** de $(x_1, \dots, x_p)$, le déterminant de $G(x_1, \dots, x_p)$.

1) Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre si, et seulement si, $G(x_1, \dots, x_p)$ est inversible.

2) On suppose $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ de dimension p et soit $x \in E$. Montrer que $\mathrm{d}(x, F)^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots, x_p)}{\det G(x_1, \dots, x_p)}$.

Exercice 8.16 ☆☆

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et $\mathcal{F} = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top Y = 0\}$.

1) Montrer que X est un vecteur propre de $A^\top$ si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est stable par A.

2) Trouver les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 8.17 ☆☆

1) Justifier que $f : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^2(\ln t - xt - y)^2 \mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.

2) Etablir l'existence d'un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(a, b) = \min\limits_{\mathbb{R}^2} f$ et le déterminer.

Exercice 8.18 ☆☆ Polynômes de Laguerre

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{+\infty} (1 - x_1 t - x_2 t^2 - \dots - x_n t^n)^2 \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est bien définie et qu'il existe un unique $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

2) Soit $P(X) = 1 - \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j=1}^k (X + j)$. Calculer $P(q)$, pour $q \in [\![1, n]\!]$, puis $P(-1)$.

3) En déduire $f(a)$.