Rappels : Dénombrement

1 - Propriétés des cardinaux.

Théorème 0.1 *Si E et F sont des ensembles finis, alors $E \cup F$, $E \cap F$ et $E \times F$ sont finis et :*

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}E + \text{card}F - \text{card}(E \cap F) \qquad \text{et} \qquad \text{card}(E \times F) = \text{card}E \times \text{card}F$$

Corollaire 1 *Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des ensembles finis, alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ et $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ aussi et :*

$$\text{card}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \text{card}E_i \qquad \textit{et, s'ils sont deux à deux disjoints :} \quad \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}E_i$$

2 - p-listes.

E est un ensemble fini de cardinal n et p est un entier naturel.

Définition 0.1 *Une p-liste d'éléments de E est un élément de E^p, i.e. un p-uplet d'éléments de E.*

Remarque 0.1 L'ordre des éléments d'une p-liste est important.
Une p-liste peut contenir plusieurs fois le même élément.

Théorème 0.2 *Il y a n^p p-listes d'éléments de E.*

Théorème 0.3 *L'ensemble des parties de E est fini et :*

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

Théorème 0.4 *Si E et F sont finis, alors le nombre d'applications de E vers F est :*

$$\text{card}(F^E) = (\text{card}F)^{\text{card}E}$$

3 - Arrangements et permutations.

E et F sont deux ensembles finis, $\text{card}E = n$ et $p \in \mathbb{N}$.

Définition 0.2 *Un arrangement de p éléments de E est une p-liste d'éléments distincts de E.*
Une permutation de E est un arrangement de tous les éléments de E.

Remarque 0.2 L'ordre des éléments d'un arrangement est important.
Un arrangement ne peut pas contenir plusieurs fois le même élément.

Théorème 0.5 *Le nombre d'arrangements de p éléments de E est* $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
Le nombre de permutations de E est $P_n = A_n^n = n!$.

Théorème 0.6 *Si* $\mathrm{card}E \leqslant \mathrm{card}F$*, le nombre d'injections de E dans F est* $A_{\mathrm{card}F}^{\mathrm{card}E}$.
Si $\mathrm{card}E = \mathrm{card}F$*, le nombre de bijections de E sur F est* $(\mathrm{card}E)! = n!$

4 - Combinaisons.

E est fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$.

Définition 0.3 *Une combinaison de p éléments de E est une partie de E à p éléments.*

Remarque 0.3 L'ordre des éléments d'une combinaison n'importe pas.
Une combinaison ne peut pas contenir plusieurs fois le même élément.

Théorème 0.7 *Le nombre de combinaisons de p éléments de E est :*

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{si } p \leqslant n \qquad \text{et } 0 \text{ sinon}$$

Théorème 0.8 *On a les relations suivantes :*

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ *et* $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ *(formule de Pascal)*
- $\forall a, b \in \mathbb{C},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$ *(binôme de Newton)*