Equations différentielles

Equation différentielle linéaire scalaire du premier ordre

Exercice 13.1 ★

Résoudre les problèmes de Cauchy $(C_1) \begin{cases} \operatorname{ch}(t)y' - \operatorname{sh}(t)y = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) et $(C_2) \begin{cases} y' - iy = \cos t \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$)

Exercice 13.2 ★

Résoudre les équations différentielles du premier ordre :

$$(E_1) |t|y' + (t-1)y = t^2 \text{ sur } \mathbb{R} \quad (E_2) t(1-t)y' + y = t \text{ sur }]0, +\infty[\quad (E_3) y' \sin^3(t) - 2y \cos(t) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice 13.3 ★★

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f' + f \xrightarrow{+\infty} 0$. Montrer que $f \xrightarrow{+\infty} 0$.

Système différentiel

Exercice 13.4 ★

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les systèmes différentiels homogènes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x' = 3x - 10y + 2z \\ y' = -2y + z \\ z' = -2x + 4y + 5z \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x' = 3x - 5y - 18z \\ y' = -2x + 6z \\ z' = 2x - 2y - 9z \end{cases}$$

Dans le dernier cas, trouver la solution vérifiant $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 1)$.

Exercice 13.5 ★

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les systèmes différentiels avec second membre suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y + 5 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x' = y + \cos t \\ y' = -x + 1 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x' = y + z + e^{-t} \\ y' = x + z + e^{-t} \\ z' = x + y + e^{-t} \end{cases}$$

Exercice 13.6 ★★

Résoudre le système différentiel $X' = AX + B$ où $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

Exercice 13.7 ★★

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel homogène à coefficients non constants $\begin{cases} x' = (t-2)x + (1-t)y \\ y' = 2(t-1)x + (1-2t)y \end{cases}$

Equation différentielle linéaire scalaire du second ordre

Exercice 13.8 ★

Résoudre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ les équations différentielles scalaires à coefficients constants suivantes :

$$(E_1) y'' - 2y' + 2y = 2 \cos t \quad (E_2) y'' - y = e^t \sin t \quad (E_3) y'' + 4y = \cos^3 t \quad (E_4) y'' + 3y' + 2y = (t-1)e^{-t}$$

Exercice 13.9 ★★

- À l'aide des séries entières, résoudre l'équation différentielle $(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} (1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = t^2 \\ (y(1), y'(1)) = (1, -1/3) \end{cases}$.

Exercice 13.10 ★★

À l'aide des séries entières, résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

$$(E_1) \quad t^2 y'' - 4ty' + 6y = \frac{t^4}{1-t} \quad \text{sur }]-1, 1[\quad (E_2) \quad t^2 y'' - 2ty' + (2+t^2)y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Exercice 13.11 ★★

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(1+t^2)y'' + ty' - 4y = 0$, à l'aide du changement de variable défini par $t = \text{sh } u$.

Exercice 13.12 ★★

Soit l'équation différentielle scalaire homogène $(H) : ty'' + 2y' + ty = 0$.

- Montrer que l'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ et développables en série entière est une droite vectorielle dont on donnera une base φ .
- À l'aide du changement de fonction inconnue défini par $y = \varphi z$, résoudre (H) sur $]0, \pi[$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13.13 ★★ UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

On cherche à déterminer l'ensemble $F = \{f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable telle que } f'(x) = f(1/x), \forall x > 0\}$.

- À l'aide du changement de variable défini par $x = e^t$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $(H) \quad x^2 y'' + y = 0$.
- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice 13.14 ★★ UNE ÉQUATION INTÉGRALE

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = 1$.

Problèmes qualitatifs

Exercice 13.15 ★

Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y' + e^{x^2} y = 0$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 13.16 ★

Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ admet une unique solution impaire.

Exercice 13.17 ★★

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on se donne A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'équivalence entre :

- A est antisymétrique.
- Toutes les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont de norme constante.

Exercice 13.18 ★★

Déterminer une équation différentielle linéaire, scalaire, homogène et du second ordre admettant pour solutions les fonctions $f_1 : x \mapsto e^{x^2}$ et $f_2 : x \mapsto e^{-x^2}$.

Exercice 13.19 ★★★

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme u de l'espace E des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ défini, pour tout $f \in E$, par $u(f)(x) = \int_0^1 f(t) \min(x, t) dt$.