

Séries numériques

Nature par comparaison

Exercice 3.1 ★

- 1) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers 0.
- 2) Démontrer le théorème de Césaro :
Si la suite réelle (v_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
- 3) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la suite $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ converge vers un réel non nul.
- 4) Discuter, selon $\beta \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\sum u_n^\beta$.

Exercice 3.2 ★

Donner la nature des séries de termes généraux suivants :

$$a_n = n^{\cos \frac{1}{n} - 2}$$

$$d_n = \arccos \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 + 2} \right)$$

$$g_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$$

$$b_n = \frac{(\ln n)^n}{n!}$$

$$e_n = \sin \left(2\pi \sqrt{n^2 + (-1)^n} \right)$$

$$h_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$$

$$c_n = \alpha^n e^{\sqrt{n}}, \alpha > 0$$

$$f_n = \sqrt{\ln(2n+3)} - \sqrt{\ln(2n)}$$

$$i_n = \ln \left(\frac{\sqrt{n+1} + (-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right), \alpha \in \mathbb{R}$$

Télescopage

Exercice 3.3 ★

Montrer que les séries de termes généraux ci-dessous convergent et calculer leur somme en procédant à un télescopage :

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

$$b_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

$$c_n = \ln \left(\frac{\ln^2(n+1)}{\ln(n)\ln(n+2)} \right)$$

$$d_n = \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

Exercice 3.4 ★

Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ converge et calculer alors sa somme.

Exercice 3.5 ★★ RÈGLE DE RAABE-DUHAMEL

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

- 1) On suppose qu'à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que $u_n = O(v_n)$.
- 2) On suppose maintenant qu'il existe un réel α tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

En comparant à une série de Riemann, montrer que la série $\sum u_n$ converge lorsque $\alpha > 1$ et diverge lorsque $\alpha < 1$.

- 3) Quelle est la nature des séries de termes généraux $\sqrt{n!} \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ et $\sqrt{n!} \prod_{k=1}^n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$?

Exercice 3.6 ★★ TRANSFORMATION D'ABEL

Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

- 1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.
- 2) En déduire que si (a_n) tend vers 0, (B_n) est bornée et $\sum (a_{n+1} - a_n)$ est absolument convergente, alors $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.
- 3) Etudier la série de terme général $\frac{\sin n}{n^\alpha}$, où $\alpha > 0$.

Comparaison avec une intégrale

Exercice 3.7 ★

Déterminer les réels a tels que $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis ceux pour lesquels $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Exercice 3.8 ★★

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = -\frac{4}{n}$ si n est multiple de 5 et $u_n = \frac{1}{n}$ sinon. Evaluer $\sum_{k=1}^{5n} u_k$ et en déduire la convergence et la somme de la série $\sum u_n$.

Séries alternées

Exercice 3.9 ★

Montrer que les séries de termes généraux ci-dessous convergent et calculer leur somme :

$$a_n = \frac{n \cdot (-1)^n}{(n+1)!}$$

$$b_n = (-1)^n \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^n(x) dx$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 3.10 ★

Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ converge et calculer sa somme à 10^{-2} près.

Produit de Cauchy

Exercice 3.11 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

- 1) La série de terme général u_n est-elle convergente ? absolument convergente ?
- 2) Etudier la fonction $x \mapsto (x+1)(n+1-x)$ sur $[0, n]$ et en déduire la nature du carré de Cauchy de la série $\sum u_n$.

Exercice 3.12 ★★

Soient $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k u_k$.

- 1) On suppose $\sum u_n$ absolument convergente. Montrer que $\sum v_n$ converge et calculer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.
- 2) Montrer que, si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (v_n) converge vers 0.
- 3) Montrer que le résultat de la première question subsiste lorsque la série $\sum u_n$ est seulement convergente.

Divers

Exercice 3.13 ★★

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 3.14 ★★★

À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer l'existence d'une suite d'entiers (N_n) telle que $n!e = N_n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2\pi n!e)}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.15 ★★★ CALCUL DE $\zeta(2)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Si $\sum_{k=0}^n a_k X^k = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que $\sum_{k=1}^n z_k^2 = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2}}{a_n^2}$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{2n+1} = 1$ et en déduire $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.
- 3) Montrer que $\forall u \in]0, \pi/2[, \cotan^2 u \leq \frac{1}{u^2} \leq 1 + \cotan^2 u$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.