Suites et séries de fonctions

Convergence d'une suite de fonctions

Exercice 6.1 ★

Dans chaque cas, étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) sur I :

1) $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

2) $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$.

3) $I = \mathbb{R}_+$ et $f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

4) $I = [0, 2]$ et $f_n(x) = n(1-x)^n \sin \frac{\pi x}{2}$.

Exercice 6.2 ★★

Soient $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{f(x)^2}{\sqrt{f(x)^2+1/n}}$.

Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $|f|$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.3 ★★★

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on définit $f_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$.

Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6.4 ★★★

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite (f_n) définie par $f_0 = \sin$ et la relation de récurrence $f_{n+1} = \sin \circ f_n$.

Convergence d'une série de fonctions

Exercice 6.5 ★

Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur I dans les cas suivants :

1) $I = \mathbb{R}_+$ et $u_n(x) = \frac{x^2}{ne^{x\sqrt{n}}}$

2) $I = \mathbb{R}_+^*$ et $u_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2}$

3) $I = \mathbb{R}_+$ et $u_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n(1+x)} \right)$

Exercice 6.6 ★★

Pour tout $n \geq 2$, on considère la fonction $u_n : x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1) Déterminer le domaine I de convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$. Y a-t-il convergence normale sur I ?

2) Établir que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x > 0$, $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \leq \frac{\varphi(x)}{\ln(n+1)}$, où $\varphi(x) = \frac{x}{e^x-1}$.

3) Montrer que la série de fonctions converge uniformément sur I .

Exercice 6.7 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x , on pose $v_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$.

1) Établir la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $\sum v_n$, ainsi que sa convergence normale sur tout intervalle $[-a, a]$, avec $a > 0$.

2) Établir que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$, $\sum_{k=n+1}^{2n} v_k(x) \geq \frac{nx}{x^2+4n^2}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Continuité et double limite

Exercice 6.8 ★

Soit $u_n(x) = \frac{\ln(n+x)}{n^2+x}$, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa limite en $+\infty$.

Pour obtenir la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$, distinguer la position de x vis à vis de n^2 , montrer que $|u_n(x)| \leq \frac{\ln(2n^2)}{n^2}$.

Exercice 6.9 ★

- 1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- 2) En considérant $f(x) - \frac{\zeta(2)}{x}$, déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 6.10 ★★

Pour tout $t \in]-1, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(t) = \prod_{k=1}^n (1+t^k)$ et $Q_n(t) = \prod_{k=1}^n (1-t^{2k+1})$.

- 1) Montrer que les suites de fonctions (P_n) et (Q_n) convergent simplement sur $] - 1, 1[$.
- 2) Montrer que leur limite est continue sur $] - 1, 1[$.

Exercice 6.11 ★★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n : x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$.

- 1) Déterminer le domaine de définition I de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ et montrer que f est continue sur I .
- 2) Déterminer la limite de f en $+\infty$, ainsi qu'un équivalent de f au voisinage de 0^+ .

Intégration terme à terme sur un segment

Exercice 6.12 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $[0, 1]$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 6.13 ★

Soit a un réel strictement positif fixé. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^a t^n e^{-t} dt$.

Exercice 6.14 ★★

Montrer que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Dérivation terme à terme

Exercice 6.15 ★★

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $v_n(x) = \frac{1}{n} \cos^n(x) \sin(nx)$.

- 1) Montrer que la fonction v_n est π -périodique et étudier la convergence simple de $\sum v_n$ sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que sa somme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$ et que, pour tout $x \in]0, \pi[$, $g'(x) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{2ix}}{1 - (\cos x)e^{ix}} \right)$.
- 3) Expliciter g sur $]0, \pi[$, puis sur $\mathbb{R}$. La convergence de la série de fonctions $\sum v_n$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6.16 ★★

$f_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

Montrer que $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et déterminer f en fonction de f_0 .

Exercice 6.17 ★★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

- 1) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $S(1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.
- 2) Pour tout $x > 0$, calculer $xS(x) - S(x+1)$ et en déduire un équivalent de $S(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.
- 3) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner ses variations.