Calcul différentiel

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Exercice 14.1 ☆
Chacune des fonctions suivantes est-elle prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

$$f : (x,y) \mapsto (x^2+y^2)^x \qquad g : (x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \qquad f_p : (x,y) \mapsto (x+y)^p \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (p \in \mathbb{N}^*)$$

Exercice 14.2 ☆☆☆ Série de fonctions à deux variables
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x,y) \in U =]-1,1[\times\mathbb{R}$, on pose $u_n(x,y) = \frac{x^n \cos(ny)}{\sqrt{n}}$. Montrer que $f : (x,y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U. *(On pourra utiliser les séries entières $\sum \sqrt{n} z^n$ et $\sum \sqrt{n+1} z^n$)*

Exercice 14.3 ☆☆ Caractérisation des fonctions constantes
Pour x et y réels convenables, on pose $f(x,y) = \arctan x + \arctan y - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

1) Montrer que f est définie et $\mathcal{C}^1$ sur l'union de 3 ouverts disjoints de $\mathbb{R}^2$, dont on admettra qu'ils sont étoilés.

2) Simplifier f et montrer que la série numérique $\sum \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 14.4 ☆☆ Théorème d'Euler
Soit C un cône ouvert de sommet O de $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire un ouvert de $\mathbb{R}^p$ tel que, pour tout $x \in C$ et tout $t > 0$, $tx \in C$. Une application $f : C \to \mathbb{R}$ est dite homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si, pour tout $x \in C$ et tout $t > 0$, $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur C. Montrer que f est homogène de degré α sur C si, et seulement si, pour tout $x \in C$, $\mathrm{d}f(x) \cdot x = \alpha f(x)$.

Exercice 14.5 ☆☆
Montrer que $f : (x,y) \mapsto \int_0^\pi \ln(x + y\cos t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > |y|\}$ et calculer $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 14.6 ☆☆☆
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n l'espace vectoriel engendré par les fonctions $(x,y) \mapsto x^i y^j$, avec $i,j \in \mathbb{N}$ tels que $i+j \leqslant n$.

1) Montrer que l'application T définie sur E_n par $T(P)(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta, \sqrt{x^2+y^2}\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ est un projecteur de E_n.

2) Déterminer $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{id}_{E_n}) \cap \mathrm{Ker}\,\Delta$, où $\Delta : P \mapsto \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$.

EDP du premier ordre

Exercice 14.7 ☆
Si U et V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, l'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v)) \end{array}\right.$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur U si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V (i.e. si ses applications coordonnées x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur V) et bijective, de bijection réciproque de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

1) Montrer que $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} V = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y) = \left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v}\right) \end{array}\right.$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, et expliciter φ^{-1}.

On souhaite résoudre sur U, l'EDP (équation aux dérivées partielles) (E) : $2x\frac{\partial f}{\partial x} - y(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, c'est-à-dire qu'on cherche les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ satisfaisant l'équation (E) sur U.

2) Montrer que f est solution de (E) sur U si, et seulement si, $g = f \circ \varphi$ est solution de (E') : $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$ sur V.

3) Résoudre (E) sur U.

Exercice 14.8 ☆☆

Résoudre les EDP suivantes :

(E_1) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + x^2 + y^2 = f$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, en passant en coordonnées polaires.

(E_2) $x\frac{\partial f}{\partial x} + (1 + \mathrm{e}^{-y})\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + \mathrm{e}^y$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, à l'aide du changement de variables $(x, y) = (\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^v, v - u)$.

(E_3) $\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} + 3f = 4x + 5y + 6$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

(E_4) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^4 + y^4}$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Exercice 14.9 ☆

Déterminer les fonctions f et g dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles qu'il existe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2xz \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = f(y)g(z) \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{2}$$

Exercice 14.10 ☆☆

1) Déterminer les fonctions f dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - y$.

2) Résoudre l'équation différentielle non linéaire $(x - y)y' + x + y = 0$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Exercice 14.11 ☆

Montrer que $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 14.12 ☆☆ Équation de Laplace

Soient $f \in \mathcal{C}^2(]-1, 1[, \mathbb{R})$ et $g :]0, \pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = f\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$.

1) Montrer que $g \in \mathcal{C}^2(]0, \pi[\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et calculer son **Laplacien** $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

2) Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle $(1 - t^2)z'' - 2tz' = 0$, puis trouver f telle que $\Delta g = 0$.

Exercice 14.13 ☆

1) Montrer que $\varphi : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x - y}$ si $x \neq y$ et $f(x, x) = \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 14.14 ☆ Théorème de Schwarz

1) Existe-t-il $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ telle que $\mathrm{d}f = \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x - \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$?

2) Déterminer $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ de différentielle $\mathrm{d}f = \lambda(x)[(x^2 + y^2 - 1)\,\mathrm{d}x - 2y\,\mathrm{d}y]$ où $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $\lambda(0) = 1$.

Exercice 14.15 ☆☆☆

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

— On dit que f est harmonique lorsque $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$.

— On dit que f vérifie la propriété de la moyenne lorsque :

$$\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall r \geqslant 0, \quad f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

1) On suppose que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que $g : (x, y) \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, 0)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ avec $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$.

b) Montrer que la fonction $\phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et la calculer.

c) En déduire que f vérifie la propriété de la moyenne.

2) Réciproquement, on suppose que f vérifie la propriété de la moyenne sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est harmonique.

Exercice 14.16 ☆☆☆ Formule de Taylor-Young

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Pour $x \in U$, on note $H_f(x)$ la **matrice hessienne** de f au point x, c'est-à-dire la matrice $(\partial_i \partial_j f(x))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Soit $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $[a, a+k] \subset U$.

a) Montrer que la fonction $g : t \mapsto f(a + tk)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et calculer $g''(t)$.

b) En déduire que $f(a + k) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot k + \int_0^1 (1-t) k^\top H_f(a + tk)\, k \,\mathrm{d}t$.

2) Etablir la formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

EDP du second ordre

Exercice 14.17 ☆☆

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $b^2 - 4ac > 0$ et l'équation aux dérivées partielles d'ordre 2 :

$$(E) \qquad a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

1) Pour quels réels α, β, l'application $\psi : (x, y) \mapsto (y + \alpha x, y + \beta x)$ est-elle un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

2) Déterminer un couple (α, β) pour réaliser l'équivalence :

$$f \text{ vérifie } (E) \iff g = f \circ \psi^{-1} \text{ vérifie } (E') : \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

3) Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ puis $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Exercice 14.18 ☆☆

On note $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ u > v\}$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - y^2 > 0\}$.

1) Montrer que $\Phi : (u, v) \mapsto (x, y) = (u^2 + v^2, u + v)$ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de Δ sur D.

2) En déduire la résolution sur D de $2(y^2 - x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = y^2 - x$.

Exercice 14.19 ☆☆☆

On note $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ et $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < 0\}$, et soit $\Phi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 - y, x^2 + y)$.

1) Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2\}$, la restriction Φ_i de Φ à U_i définit un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U_i dans un ouvert V_i à préciser.

2) A l'aide du changement de variables Φ_1, résoudre l'EDP (E) $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4x^3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur U_1.

3) Faire de même sur U_2, puis résoudre (E) sur $\mathbb{R}^2$.

Extrema

Exercice 14.20 ☆☆

Etudier les extrema des fonctions suivantes :

— $f_1 : (x, y) \mapsto xy^2 - 2x^2 y$ sur $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 1\}$.

— $f_2 : (x, y) \mapsto \frac{a}{x} + \frac{a}{y} + \frac{xy}{a^2}$ sur $]0, +\infty[^2$, où $a > 0$.

— $f_3 : (x, y) \mapsto x^2(1 + y)^3 + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

— $f_4 : (x, y) \mapsto y^4 - x^2 y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

— $f_5 : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - x^2 + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

— $f_6 : (x, y) \mapsto (2x^2 + 3y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ sur $\mathbb{R}^2$.

— $f_7 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x - y$ sur $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Exercice 14.21 ☆☆

Déterminer les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle de rayon 1. On admet que l'aire d'un triangle ABC du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est donnée par $\mathcal{A} = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{2}$.

1) Montrer que $K = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

2) Pour $(\theta_1, \theta_2) \in K$, montrer que l'aire du triangle de sommets $A(1, 0)$, $B(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$ et $C(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$ est :

$$f(\theta_1, \theta_2) = 2\sin\left(\tfrac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\theta_2}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)$$

3) Déterminer les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle de rayon 1.

Courbe

Exercice 14.22 ☆
Déterminer les vecteurs tangents au point double de la courbe définie paramétriquement par $(x(t)\,;\,y(t)) = \left(2t+t^2\,;\,2t-\frac{1}{t^2}\right)$.

Exercice 14.23 ☆
On admet que, pour qu'il y ait inflexion en $M(t)$, il est nécessaire (resp. suffisant) que $\det(M'(t), M''(t))$ s'annule (resp. s'annule en changeant de signe) en t. Montrer que l'arc défini paramétriquement par $(x(t)\,;\,y(t)) = (\cos t\,;\,\sin t(1+\cos t))$ présente une inflexion et en donner les coordonnées.

Exercice 14.24 ☆
Déterminer une équation cartésienne de la courbe définie paramétriquement par $(x(t)\,;\,y(t)) = \left(\frac{1}{1+t+t^2}\,;\,\frac{t}{1+t+t^2}\right)$. Montrer qu'elle admet un centre de symétrie et le déterminer.

Exercice 14.25 ☆☆
Soit Γ, la courbe de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $(x(t)\,;\,y(t)\,;\,z(t)) = \left(\frac{1}{1+t}\,;\,\frac{t}{t^2-1}\,;\,\frac{t}{t-1}\right)$.

1) Montrer que Γ est régulière et qu'elle est tracée sur une surface $\mathcal{S}$ régulière dont on donnera une équation.

2) Montrer que Γ est tracée sur un plan $\mathcal{P}$ dont on donnera une équation.

3) Existe-t-il des points de Γ en lesquels $\mathcal{P}$ est tangent à $\mathcal{S}$?

4) Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, déterminer le milieu du segment $[M(t), M(1/t)]$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 14.26 ☆☆
Tracer la boucle, trajectoire de la fonction $M : t \mapsto ((1-t)^2\mathrm{e}^t, 2(1-t)\mathrm{e}^t)$ sur $]-\infty, 1]$ et calculer sa longueur L définie par :

$$L = \int_{-\infty}^{1} \|M'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t$$

Exercice 14.27 ☆☆
Déterminer les paramètres réels a, b, c, d, e vérifiant $b^2 = 4a$, pour que la courbe d'équation $x^2 + ay^2 + bxy + cx + dy + e = 0$ soit tangente à (Ox) en $(1, 0)$ et à (Oy) en $(0, 2)$.

Exercice 14.28 ☆☆
Soient $a > b > 0$ et Γ la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Déterminer les points de Γ en lesquels la normale est la plus éloignée de l'origine O.

Surface

Exercice 14.29 ☆
On considère les surfaces S_1 et S_2 d'équations respectives $2x^2 + y^2 + z^2 = 10$ et $z^2 = 2 + xy$.

1) Déterminer les équations cartésiennes des plans tangents aux surfaces S_1 et S_2 au point $A(1, 2, 2)$.

2) Déterminer un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$ en A.

Exercice 14.30 ☆
Montrer que la surface S d'équation $xy = z$ est-elle régulière et déterminer les points de S en lesquels le plan tangent contient la droite $\mathcal{D}$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x-2=0 \\ y-2z+3=0 \end{array}\right.$

Exercice 14.31 ☆
Déterminer les points réguliers de Σ d'équation $xy = z^3$ et montrer que le plan d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$ est tangent à Σ.

Exercice 14.32 ☆
Soient $a > 0$ et S_1 et S_2 les surfaces d'équations respectives $x^2 + y^2 = a^2$ et $y^2 = 2xz$. Quels sont les points réguliers de $S_1 \cap S_2$?

Exercice 14.33 ☆☆
Soit $R > r > 0$ et $\mathcal{T}$ le **tore** d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2 = 2R\sqrt{x^2 + y^2}$.

1) Montrer que $\mathcal{T}$ est une surface régulière.

2) Quelles sont les intersections de $\mathcal{T}$ avec les plans d'équation $z = 0$ et $y = 0$?

Exercice 14.34 ☆☆☆
On note S la surface d'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Déterminer les droites tracées sur S et montrer qu'elles sont coplanaires.
Indications :

1) *Commencer par chercher les droites D non parallèles à (xOy), c'est-à-dire passant par un point $A(p, q, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a, b, 1)$, donc d'équations paramétriques* $\left\{\begin{array}{l} x = at + p \\ y = bt + q \\ z = t \end{array}\right.$ *ou bien, ce qui revient au même, d'équations cartésiennes* $\left\{\begin{array}{l} x = az + p \\ y = bz + q \end{array}\right.$

2) *Vérifier que les intersections de ces droites deux à deux sont non vides et que les points obtenus définissent un plan dont on donnera une équation cartésienne.*

3) *On peut utiliser le gradient.*