Espaces probabilisés

Dénombrement et probabilité

Exercice 10.1 ☆
On lance trois dés honnêtes. Calculer la probabilité

1) d'obtenir au moins un as.

2) d'obtenir au moins deux faces identiques.

3) que la somme des chiffres soit paire.

4) que la somme des chiffres obtenus soit paire et que l'on ait au moins deux faces identiques.

Exercice 10.2 ☆ Paradoxe du Chevalier de Méré
Comparer la probabilité d'obtenir au moins un as en quatre lancers d'un dé et au moins une fois deux as en lançant vingt-quatre fois deux dés.

Exercice 10.3 ☆
Soient $A_1, \dots, A_n$, n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1) \leqslant P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant n} P(A_k)$$

Exercice 10.4 ☆
Une urne contient $N \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à N. On tire une poignée aléatoire de n boules ($n \leqslant N$) et soit $k \in [\![1, N]\!]$.

1) Déterminer la probabilité que toutes les boules obtenues aient un numéro inférieur ou égal à k.

2) Déterminer la probabilité que le plus grand numéro obtenu soit k et simplifier la somme $\sum_{k=n}^{N} \binom{k-1}{n-1}$.

Exercice 10.5 ☆☆
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer successivement que :

$$P(A)P(\overline{A}) \leqslant 1/4 \qquad \text{et} \qquad |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leqslant 1/4$$

Exercice 10.6 ☆☆ Combinaison avec répétition
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on note Γ_n^p le nombre de façons de ranger n objets identiques, donc indiscernables, dans les p tiroirs d'une commode, notés $T_1, \dots, T_p$. Chaque tiroir est suffisamment grand pour contenir les n objets.

1) Calculer Γ_n^1, Γ_n^2 et Γ_n^3, puis Γ_n^p.

2) Combien existe-t-il de numéros de téléphone constitués d'une suite croissante de 10 chiffres ?

Exercice 10.7 ☆ Marche aléatoire
Un spot se déplace sur un axe gradué par les entiers relatifs. Il se trouve initialement en 0 et se déplace chaque seconde d'une unité vers la gauche ou vers la droite de manière équiprobable.

1) Quelle est la probabilité qu'il se trouve en 0 après n secondes ?

2) Pour $k \in [\![-n, n]\!]$, quelle est la probabilité qu'il se trouve en k après n secondes ?

3) Reprendre les questions précédentes dans le cas où, à chaque instant, soit le spot reste à sa place, soit il se déplace d'une unité vers la gauche, soit vers la droite et de manière équiprobable.

Exercice 10.8 ☆
X, élève d'une classe de 23 élèves, s'étonne en constatant que deux élèves ont même date d'anniversaire. Y prétend que c'est le contraire qui eût été étonnant. Lequel des deux a raison ?

Exercice 10.9 ☆☆ Danseurs de Chicago
Lors d'une compétition de danse, n couples (n hommes et n femmes) se présentent. On constitue au hasard n couples (homme-femme) pour l'épreuve.

1) Quelle est la probabilité p_n pour que tous les couples ainsi reconstitués correspondent aux couples initiaux ?

2) Quelle est la probabilité q_n pour qu'aucun couple ne corresponde aux couples initiaux ? Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.
On pourra utiliser la formule du crible de Poincaré : si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles finis,

$$\operatorname{Card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right)$$

Conditionnement et indépendance

Exercice 10.10 ☆
Une urne contient n boules blancs et n boules noires et on effectue des tirages successifs d'une boule avec remise.

1) Pour $k \geqslant 1$, probabilité que la k-ème boule soit blanche sachant que les $k-1$ premières sont blanches ?

2) Pour $k \geqslant 1$, probabilité que les k premières boules tirées soient blanches ?

3) Mêmes questions si le tirage a lieu sans remise, pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 10.11 ☆
Un joueur a trois dés A, B, C à faces noires ou blanches. A possède 4 faces blanches, B 3 faces blanches et C 2 faces blanches. Il tire un dé au hasard et le lance n fois.

1) Calculer la probabilité qu'il obtienne n fois une face noire.

2) Sachant qu'il a obtenu n fois une face noire, quelle est la probabilité qu'il ait choisi le dé C ? Limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini ?

Exercice 10.12 ☆☆ Parodoxe de (Walter) Penney - 1969
On lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note A l'événement « la séquence Pile-Pile-Face apparaît au moins une fois »et A' l'événement « la séquence Pile-Face-Face apparaît au moins une fois ».

1) Calculer $P(A)$, puis $P(A')$.

2) Calculer la probabilité p de l'événement $A'' =$« la séquence Pile-Pile-Face arrive avant la séquence Pile-Face-Face ».

Exercice 10.13 ☆☆☆
Pour $s > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et on pose $P(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Pour quel(s) λ, l'application P détermine-t-elle une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$?

2) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de l'événement $A_p = \{n \in \mathbb{N}^*,\ p \mid n\}$.

3) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombre premiers. Vérifier que la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est mutuellement indépendante.

4) En étudiant $P(\{1\})$, établir que :

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Exercice 10.14 ☆☆ Chaîne de Markov
Gatto le chat se situe initialement en un point A d'un parcours trianglaire ABC. Chaque minute, soit il reste à sa place avec la probabilité $1/2$, soit il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points. On note A_n (resp. B_n, C_n), l'événement « Gatto se trouve en A (resp. B, C) après n minutes ».

1) Diagonaliser, en base orthonormée, la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{bmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n.

3) En déduire $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n, ainsi que leur limite, lorsque $n \to +\infty$.

4) Topolino la souris, très occupée à grignoter un morceau de fromage, se trouve en C et n'en bouge pas. Elle a besoin de n minutes pour venir à bout de son festin. Calculer n pour que Topolino ait au moins une chance sur deux de finir son repas avant que Gatto n'entame le sien.

Exercice 10.15 ☆

On lance une seule fois une pièce équilibrée, puis on effectue des tirages dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire selon la règle suivante :

— On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne.

— On ajoute dans l'urne une boule blanche si la pièce a initialement donné pile et une boule noire sinon.

Ainsi, l'urne contient $k+1$ boules au moment du k-ième tirage.

1) Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au k-ième tirage ?

2) Quelle est la probabilité d'avoir fait pile sachant qu'on a tiré une boule blanche au k-ième tirage ?

3) Quelle est la probabilité d'obtenir k boules blanches lors des k premiers tirages ?

Exercice 10.16 ☆☆

Deux archers A_1 et A_2 tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un des deux la touche. A_1 commence. A_i touche la cible avec la probabilité $p_i \in]0,1[$ et on note $q_i = 1 - p_i$. Les tirs sont supposés indépendants.

1) Pour $i \in \{1,2\}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité pour que A_i l'emporte lors du tir numéro $2n+i$.

2) Calculer la probabilité de l'événement G_i : « A_i l'emporte » et la probabilité pour que le jeu ne se termine pas.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur p_1 et p_2 pour que le jeu soit équitable. Que dire si $p_1 \geqslant \frac{1}{2}$?

Exercice 10.17 ☆☆☆

On dispose de deux pièces A et B, donnant pile avec les probabilités respectives $a \in]0,1[$ et $b \in]0,1[$. On choisit au hasard l'une des deux pièces et on la lance. Si on obtient pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite infinie de lancers.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement « on utilise A pour la première fois lors du n-ième lancer » et V_n l'événement « on a obtenu n piles lors des n premiers lancers ».

Calculer $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ et $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right)$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (resp. B_n) l'événement « on utilise la pièce A (resp. B) lors du n-ième lancer » et R_n l'événement « on obtient pile au n-ème lancer ».

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(A_n)$, puis exprimer $P(R_n)$ en fonction de $P(A_n)$.

b) Comparer $\ell = \lim_{n \to +\infty} P(R_n)$ et $\frac{a+b}{2}$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 10.18 ☆☆☆ Lemmes de Borel-Cantelli

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

1) On suppose, dans cette question, que la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ converge.

En utilisant l'événement $B = \bigcap_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ et son complémentaire, montrer qu'il est presque certain que seul un nombre fini des A_k se réalisent simultanément.

2) On suppose, dans cette question, que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ diverge.

Montrer qu'il est presque certain qu'une infinité des A_k se réalisent simultanément.