Révisions et compléments d'algèbre linéaire

Révisions

Exercice 1.1 ☆
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u^{-1}(u(F)) = F + \operatorname{Ker} u$.

Exercice 1.2 ☆
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) = 0\}$.

1) Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser sa dimension.

2) Déterminer $A \cap \operatorname{Vect}(1, (X-1)^p)$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$. En déduire une base de A.

Exercice 1.3 ☆☆
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$. Etablir l'équivalence : $a_0 \neq 0 \iff \forall Q \in \mathbb{C}_n[X],\ \exists P \in \mathbb{C}_n[X],\ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$.

Exercice 1.4 ☆
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. Montrer que l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que la famille (AX, X) est liée est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

Exercice 1.5 ☆☆
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang p. Déterminer la dimension de :

$$F = \{v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}\} \qquad \text{puis} \qquad G = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$$

Exercice 1.6 ☆
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 0$ et $P = Q(X) - Q(X-1)$.

Exercice 1.7 ☆☆
E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $p \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$ (on dit que u est nilpotent d'indice p).

1) Soit $a \in E$. Montrer que $(a, u(a), u^2(a), \ldots, u^{p-1}(a))$ est libre si, et seulement si, $u^{p-1}(a) \neq 0$.

2) Montrer que $\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker}(u) \subsetneq \operatorname{Ker}(u^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker}(u^{p-1}) \subsetneq E$.

3) Montrer que, si E est de dimension finie n, alors $p \leqslant n$ (et donc $u^n = 0$).

Exercice 1.8 ☆
Soit $n \geqslant 2$. Quel est le rang des matrices $A = (\sin(i+j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = ((i+j)^2)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 1.9 ☆☆
$a, b, c, d, a_1, \ldots, a_n$ étant des complexes, résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} (a-1)x + ay + z = 1 \\ ax + 2y + 3z = 3 \\ (a+1)x + ay + (a-1)z = a-1 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2a_n \end{cases}$$

Somme directe et projecteur

Exercice 1.10 ☆
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E et F' (resp. G') un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (resp. G). Montrer que $F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'$.

Exercice 1.11 ☆
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E vérifiant $u^3 = u$. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$.

Exercice 1.12 ☆
Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection f sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z = 0$ parallèlement à la droite $\mathcal{D}$ d'équations $x = y = z$, ainsi que celle de la symétrie vectorielle par rapport à $\mathcal{P}$ et de direction $\mathcal{D}$.

Exercice 1.13 ☆
p et q sont deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E qui commutent. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E et prouver que $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker}(p) + \operatorname{Ker}(q)$ et que $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$.

Exercice 1.14 ☆☆☆
Soit $(p_1, \dots, p_n)$ une famille de projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie tel que $p = p_1 + \cdots + p_n$ soit un projecteur.

1) Montrer que la trace de tout projecteur de E est égale à son rang.

2) Montrer que $\operatorname{Im}(p) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im}(p_i)$ et que la somme $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im}(p_i)$ est directe.

3) Montrer que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$. En déduire que $\operatorname{Ker} p = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} p_i$.

Exercice 1.15 ☆☆☆
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^m = \mathrm{id}_E$.
Montrer que $p = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k$ est un projecteur de E et que $\dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{tr}(u^k)$.

Forme linéaire et hyperplan

Exercice 1.16 ☆
Si $H_1, \dots, H_p$ sont des hyperplans d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension n, montrer que $\dim \bigcap_{k=1}^{p} H_k \geqslant n - p$.

Exercice 1.17 ☆☆
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Montrer que F est l'intersection de $n - p$ hyperplans de E.

Exercice 1.18 ☆
Si H un hyperplan du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un s.e.v. de E tel que $F \not\subset H$. Montrer que $F \cap H$ est un hyperplan de F.

Exercice 1.19 ☆
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ϕ une forme linéaire non nulle sur E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker} \phi$ est stable par u si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\phi \circ u = \lambda \phi$.

Exercice 1.20 ☆
Soient $a \in \mathbb{K}$ et φ une forme linéaire non nulle sur $E = \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant : $\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X],\ \varphi((X-a)P) = 0$.
Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi$ et montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $P \in E$, $\varphi(P) = \lambda P(a)$.

Matrices par blocs

Exercice 1.21 ☆
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, A et B le sont.

Exercice 1.22 ☆☆
E est de dimension finie $2p \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

1) $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg} u = p$ **2)** $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$ **3)** $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{K})$ est matrice de u

Exercice 1.23 ☆

Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ C \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+p}(\mathbb{K})$ et calculer M^{-1}.

Exercice 1.24 ☆ Produit tensoriel

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\det \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$.

Trace

Exercice 1.25 ☆
Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$: $3X + 2X^\top = \operatorname{tr}(X).I_5$.

Exercice 1.26 ☆
Soient A et B deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) \neq 1$.
Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{l} X = I_n + \operatorname{tr}(Y)A \\ Y = I_n + \operatorname{tr}(X)B \end{array} \right.$ d'inconnue $(X, Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

Exercice 1.27 ☆☆
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{tr}(X) = 0 \Longrightarrow \operatorname{tr}(AX) = 0$. Montrer que A est un matrice scalaire.

Exercice 1.28 ☆☆
E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

1) Montrer que, soit $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$, soit $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$.

2) En déduire que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 est semblable soit à E_{21}, soit à $kE_{11},\ k \neq 0$.

3) Montrer que deux matrices de rang 1 sont semblables si, et seulement si, elles ont même trace.

Exercice 1.29 ☆
Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(A) = A^\top$. Calculer la trace et le déterminant de φ.

Exercice 1.30 ☆☆
Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Etablir que : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi = \lambda \operatorname{tr} \iff \forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \varphi(AB) = \varphi(BA)$.

Matrices semblables

Exercice 1.31 ☆
Montrer que, dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, les matrices $E_{1,2} + E_{4,3}$ et $E_{1,3} + E_{2,4}$ sont semblables.

Exercice 1.32 ☆☆

Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ nilpotente est semblable à $\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.33 ☆☆
Soit $A = (a_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = (-1)^i \binom{j}{i}$ si $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et 0 sinon.
Justifier l'existence et calculer A^{-1}, puis montrer que $A^\top A$ est semblable à son inverse.

Exercice 1.34 ☆☆☆

1) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des complexes deux à deux distincts et $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Déterminer le noyau puis l'image de l'endomorphisme $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice à diagonale nulle.
En déduire qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = AB - BA$.

Déterminants et interpolation de Lagrange

Exercice 1.35 ☆☆

Les paramètres $a, b, a_1, \dots, a_n$ étant réels, calculer les déterminants d'ordre n suivants :

$$A_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix} \qquad B_n = \begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & & & (0) \\ -a_1 & a_1+a_2 & -a_2 & & \\ & -a_2 & a_2+a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -a_{n-1} \\ (0) & & & -a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix} \qquad C_n = \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ b & 1 & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ b & & & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 1.36 ☆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$. On considère la matrice $M = (\omega^{pq})_{0 \leqslant p,q \leqslant n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $M\overline{M}$, puis $|\det M|$.

Exercice 1.37 ☆

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m < n$, $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Calculer $\det(AB)$.

Exercice 1.38 ☆☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. En formant A^5, montrer que $\det A > 0$.

Exercice 1.39 ☆☆ Théorème de Hadamard

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante, i.e. $\forall i \in \mathbb{N}_n,\ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice 1.40 ☆☆☆

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et $a_0, \dots, a_n$ des complexes deux à deux distincts.

1) Justifier que $(P, P', ..., P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2) Montrer que $(P(X + a_0), P(X + a_1), \dots, P(X + a_n))$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 1.41 ☆☆☆

Soient $n \in \mathbb{N}$, a et b deux réels tels que $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$.

1) Montrer que, si f possède au moins $n + 2$ zéros distincts sur $[a, b]$, alors $f^{(n+1)}$ possède au moins un zéro sur $[a, b]$.

2) Soient $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ et P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré au plus n aux points de coordonnées $(x_i, f(x_i))$, pour $i \in [\![0, n]\!]$. Établir la relation :

$$\forall x \in [a, b], \quad \exists \xi \in [a, b], \quad f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

(On pourra utiliser la fonction $W : t \mapsto f(t) - P_n(t) - \frac{q(t)}{q(x)} (f(x) - P_n(x))$, où $q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$)

3) Montrer que $\sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P_n(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, lorsque $f = \exp$.