

Intégrales à paramètre

Suite et série d'intégrales

Exercice 7.1 ★

Déterminer la limite des suites de terme général :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} dx \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \sin(t/n)}{t(1+t^2)} dt \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n+1}} dx \quad L_n = \int_0^n x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$$

Exercice 7.2 ★

Soient p et q deux réels strictement positifs.

Pour $x \in [0, 1[$, rappeler la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-x^q)^n$, puis montrer que $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nq+p}$.

Exercice 7.3 ★

Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, on a $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x/n}}{x^{\alpha+2}} dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n\alpha}$.

Exercice 7.4 ★

Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\int_0^{+\infty} S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 7.5 ★

Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+nx}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que $\int_0^1 S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(1+\sqrt{1+n})}$.

Exercice 7.6 ★

Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x} \cos(nx) \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\int_0^{+\infty} S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 7.7 ★★

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice 7.8 ★★★ FORMULES DE GAUSS ET DE WEIERSTRASS

Soit $x > 0$. Montrer que, $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et en déduire (γ étant la constante d'Euler) :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}$$

Intégrale fonction d'un paramètre

Exercice 7.9 ★

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ et on considère la fonction $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi x t - \frac{t^2}{2}} dt$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4\pi^2 x f(x)$. En déduire une expression simple de f .

Exercice 7.10 ★★

Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^x}{(t-1)\sqrt{t}} dt$ est continue sur son domaine de définition.

Exercice 7.11 ★

- 1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt$ est continue sur $\mathbb{R}$, impaire et calculer $f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $f'(1)$ et tracer le graphe de f .

Exercice 7.12 ★

- 1) Montrer que $F : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(x \sin \theta)}{\sin \theta} d\theta$ continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer F' . (On pourra utiliser le changement de variable $t = \tan \theta$)
- 3) En déduire que $F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Exercice 7.13 ★★ FONCTION GAMMA D'EULER

Pour x réel convenable, on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- 1) Déterminer le domaine de définition I de la fonction Γ . Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2) Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et en donner un équivalent en 0^+ .
- 3) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que Γ' est strictement croissante et s'annule en unique point $\alpha \in]1, 2[$.
- 4) Déterminer les variations et tracer l'allure de la courbe de Γ .

Exercice 7.14 ★★ FONCTION GAMMA D'EULER (BIS)

- 1) On pose $g = \ln \circ \Gamma$. Montrer que la fonction Γ est logarithmiquement convexe, c'est-à-dire que g' est croissante.
- 2) Déterminer un équivalent de la fonction $G : x \mapsto \int_x^{x+1} g(t) dt$ en $+\infty$.
- 3) En déduire un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 7.15 ★★ THÉORÈME DE FUBINI

Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux segments de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et on pose :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times [c, d], \quad \varphi(x, t) = \int_a^x f(u, t) du$$

- 1) Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, la fonction $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $[c, d]$.
- 2) On définit alors, pour tout $x \in [a, b]$, $\psi(x) = \int_c^d \varphi(x, t) dt$. Montrer que la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
- 3) En déduire le théorème de Fubini : $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt$
- 4) Pour $x \in [0, 1]$, calculer $\int_0^1 \frac{x}{1+xt} dt$, puis $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

Exercice 7.16 ★★★

Pour $(x, y) \in]1, +\infty[^2$, calculer $f(x, y) = \int_0^\pi \ln \left(\frac{x - \cos t}{y - \cos t} \right) dt$. (On pourra utiliser le changement de variable $\tan(t/2) = u$)

Exercice 7.17 ★★★

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Etudier les limites de $x \mapsto \left(\int_0^1 [f(t)]^x dt \right)^{1/x}$ en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 7.18 ★★★ CONVOLUTION

On considère l'espace préhilbertien $E = L_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel et de la norme associée notée $\|\cdot\|_2$. Soient $f, g \in E$ et $f * g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$.

- 1) Montrer que $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.
- 2) Construire une suite (f_n) de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, nulles en dehors d'un segment, telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$.
- 3) Montrer que $f * g$ tend vers 0 en $\pm\infty$.